МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка
к выполнению контрольной работы
«Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ДУ»

по дисциплине: *«Специальные разделы высшей математики»*
название дисциплины

для направлений: 09.03.01 *Информатика и вычислительная техника*,

09.03.02 *Информационные системы и технологии*
код направления (специальности)

бакалавриат, очная форма обучения
код и наименование специальности, форма обучения

Мурманск
2022

Составитель – Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.-мат.наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка к выполнению контрольной работы рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики

24.05.2022 г., протокол № _9____.

дата

Рецензент – Романовская Юлия Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Оглавление

1. Общие организационно-методические указания

Контрольная работа (КР) включает в себя основные практические задачи по модулю «Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ДУ» дисциплины «Специальные разделы высшей математики» и предназначена для студентов второго курса направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии». КР выполняется в домашнем режиме по индивидуальным вариантам с последующей защитой в аудитории.

Целевая установка: при выполнении КР студент должен:

- показать усвоенный теоретический материал по определению основных типов дифференциальных уравнений первого и второго порядков, решаемых в квадратурах, и методам их решения;
- знать условия, при которых возможно получить единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка;
- уметь практически найти общее и частное решение дифференциального уравнения или системы ДУ;
- показать достоверность решения и пояснить его графическую интерпретацию;
- иметь представление об интегральном преобразовании Лапласа и его использовании для решения обыкновенных ДУ и систем ДУ.

2. Задание, план выполнения, требования к оформлению отчета

КР содержит 6 заданий, из которых первое и третье относятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, второе - к решению систем линейных ДУ, четвертое, пятое и шестое задания – на преобразование Лапласа и его применение к решению задачи Коши для линейного ДУ и системы линейных ДУ. Для каждого задания предлагается образец его решения.

Содержание заданий каждого варианта:

Задание 1. Определить тип обыкновенного дифференциального уравнения, найти его общее решение и найти частное решение, если поставлены начальные условия (количество ДУ: 6).

Задание 2. Решить систему дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом.

Задание 3. Построить интегральные линии дифференциального уравнения первого порядка. Найти уравнение интегральной линии, проходящей через заданную точку M_0. Проанализировать теорему существования и единственности частных решений данного ДУ.

Задание 4. Найти изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \geq 0$

Задание 5. Восстановить несколько функций-оригиналов, если даны их изображения по Лапласу.
Задание 6. Решить операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердить проверками.

Общие требования к оформлению КР:

- каждая задача должна иметь условие, подробное решение и ответ;
- в решении нужно ссылаться на теоретические факты (из темы КР), на основании которых строится решение (в частности, обоснованно определять тип дифференциального уравнения, согласовывая его структуру с канонической формой ДУ соответствующего типа);
- построение графиков и приведение подробных выкладок в решении обязательно (в частности, требуется в основном ручная реализация действий интегрирования);
- рекомендуется выполнять проверки решений ДУ вручную или с помощью прикладных математических пакетов.

План выполнения КР:

- КР выдается в начале прохождения модуля, выполняется по мере изучения тем модуля и сдается преподавателю практических занятий после завершения модуля на практических занятиях;
- большинство заданий КР выполняются как домашнее задание по темам, которые разбирались в аудитории;
- – защитой КР является компьютерный тест по темам модуля.

3. Список рекомендуемых учебных ресурсов

1. Конспект лекций ведущего преподавателя дисциплины (в том числе в электронном виде).
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для вузов. В 2-х томах. Том 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 440 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2000.– 256с.
4. Данко П.Б., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Часть II: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1997. – 416с.
5. Методическая разработка к выполнению КР «Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ДУ» для направления 09.03.01 «ИВТ».

4. Образец заданий одного варианта

***Задание* 1**

Определите тип дифференциального уравнения, найдите его общее решение и найдите частное решение, если поставлены начальные условия:

1.1. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$, $y|_{x=1} = 3$;

1.2. $(3x^2 + 7y^2)dx - (4x + 6y)xdy = 0$;

1.3. $(y'')^2 = y'$, $y|_{x=1} = 3$, $y'|_{x=1} = 0$;

1.4. $2y'' - y' - y = 3xe^{-x}$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 2$;

1.5. $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{(x+2)\,\mathrm{e}^{5x}}{x^2 - 1}$;

1.6. $y'' + 2y' + 26y = \cos 5x - 2\sin 5x + 4e^{-x}$.

***Задание* 2**

Решите систему линейных дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$$

***Задание* 3**

Постройте интегральные линии дифференциального уравнения первого порядка.
Найдите уравнение интегральной линии, проходящей через заданную точку M_0.
Проанализируйте теорему существования и единственности частных решений для данного дифференциального уравнения: $xy' = x^2 + y$, $M_0(4;1)$.

***Задание* 4**

Найдите изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \ge 0$:

1) $f(t) = t \cdot \sin^2 t$; 2) $f(t) = \left[\begin{array}{l} t^2,\ 0 \le t < 2 \\ 4,\ 2 \le t \le 4 \\ 0\ ,\ t > 4 \end{array}\right.$; 3) $f(t) = \left[\begin{array}{l} t-1\ ,\ 0 \le t \le 1 \\ 1\ ,\ 1 \le t \le 3 \end{array}\right.$, $T = 3$.

***Задание* 5**

Восстановите функции-оригиналы, если даны их изображения по Лапласу:

1) $F(p) = \dfrac{1-2p}{p^2 + 4p + 20} \cdot e^{-p}$; 2) $F(p) = \dfrac{p}{(p+2)^2 (p^2+4)}$; 3) $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+9)^2}$ - с помощью свёртки.

***Задание* 6**

Решите операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердите проверками.

1) $x'' - x' = e^t \sigma(t-2)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$; 2) $\begin{cases} x' + 4x = y \\ y' + y = -2x, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3. \end{cases}$

5. Пример выполнения задания

Задание 1

Определите тип дифференциального уравнения, найдите его общее решение и найдите частное решение, если поставлены начальные условия:

1.1. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$, $y|_{x=1} = 3$;

1.2. $(3x^2 + 7y^2)dx - (4x + 6y)xdy = 0$;

1.3. $(y'')^2 = y'$, $y|_{x=1} = 3$, $y'|_{x=1} = 0$;

1.4. $2y'' - y' - y = 3xe^{-x}$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 2$;

1.5. $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{(x+2)e^{5x}}{x^2 - 1}$;

1.6. $y'' + 2y' + 26y = \cos 5x - 2\sin 5x + 4e^{-x}$.

Решение

1.1. $\boldsymbol{y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln^2 x}$, $\boldsymbol{y'|_{x=1} = 0}$

Данное ДУ первого порядка относительно функции $y(x)$ имеет вид *обобщённого линейного уравнения* (уравнения Бернулли):

$$y' + p(x)y = y^{\alpha} q(x), \text{ в котором } p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = \ln^2 x,\ \alpha = 2.$$

В соответствии с теоретическим методом решения, следует искомую функцию $y(x)$ искать в виде произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, для каждой из которых всегда получается дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$\boxed{y(x) = u(x) \cdot v(x)}$ => $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

ДУ: $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln^2 x$ <=> $u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot \dfrac{1}{x} = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln^2 x$ <=>

$$u' \cdot v + u \underbrace{\left(v' + v \cdot \frac{1}{x} \right)}_{0} = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln^2 x.$$

Поскольку в решение задачи вместо одной неизвестной функции $y(x)$ введены две функции $u(x)$ и $v(x)$, то в решении появился «произвол», которым можно распорядиться удобным образом; вследствие этих рассуждений можно функцию $v(x)$ подобрать так, чтобы выполнялось равенство $v' + v \cdot \dfrac{1}{x} = 0$.

ДУ для функции $v(x)$: $v'+v\cdot\frac{1}{x}=0$ <=> $\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$ <=> $\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}+C$ <=>

$$\ln|v|=-\ln|x|+\ln C_1 \iff v=\pm\frac{C_1}{x} \Rightarrow \boxed{v=\frac{1}{x}};$$

в проведённых выкладках заменялось C на $\ln C_1$, где $C_1>0$, затем фиксировалось $\pm C_1=1$, что допустимо в решении линейных ДУ первого порядка.

ДУ для функции $u(x)$: $u'\cdot v=u^2\cdot v^2\cdot\ln^2 x$ <=> $u'=u^2\cdot v\cdot\ln^2 x$ <=> $\frac{du}{dx}=u^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x$ <=>

$$\left[\begin{array}{l}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{x}\ln^2 x\cdot dx \Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=\int\frac{1}{x}\ln^2 xdx+C \iff -\frac{1}{u}=\frac{\ln^3 x}{3}+C \iff u=\frac{-3}{\ln^3 x+3C}\\ u=0\end{array}\right.$$

<=> $\boxed{u=\frac{-3}{\ln^3 x+C}}$ или $u=0$ (сделано переобозначение $3C$ на C).

Перемножением функций $u(x)$ и $v(x)$ находим общее решение данного ДУ:

$$\boxed{y=u\cdot v=\left(\frac{-3}{\ln^3 x+C}\right)\cdot\frac{1}{x}}$$

Если рассмотреть случай $u(x)=0$, который выделялся на этапе разделения переменных в решении ДУ относительно функции u, то получим функцию $\boxed{y=0}$, которая удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению, но является его особым решением, так как ни при каком значении постоянной C эта функция не получается из найденного общего решения.

Решаем задачу Коши:
так как имеем начальное условие $y|_{x=1}=3$, то подставляем $x=1$ и $y=3$ в общее решение и находим значение произвольной постоянной C, при котором будет удовлетворяться это начальное условие:

$$3=\left(\frac{-1}{\frac{1}{3}\ln^3 1+C}\right)\frac{1}{1} \iff 3=-\frac{1}{C} \iff C=-\frac{1}{3};$$

возвращая это значение C в общее решение, получаем искомое частное решение:

$$y=\left(\frac{-3}{\ln^3 x-\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{1}{x} \iff \boxed{y(x)=\left(\frac{-9}{3\ln^3 x-1}\right)\cdot\frac{1}{x}}.$$

Заметим, что особое решение $y=0$ не удовлетворяет поставленному начальному условию, поэтому получаем только одну интегральную линию, проходящую на плоскости XOY через точку $M_0(1;3)$.

Ответ по задаче 1.1: 1) $y(x,\,C)=\left(\dfrac{-3}{\ln^3 x+C}\right)\cdot\dfrac{1}{x}$ - общее решение,

$y=0$ - особое решение данного ДУ;

2) $y(x)=\left(\dfrac{-9}{3\ln^3 x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{x}$ - частное решение,

удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1}=3$.

1.2. $(3x^2+7y^2)\,dx-(4x+6y)x\,dy=0$

Преобразуем данное ДУ к каноническому виду ДУ первого порядка, чтобы определить его тип:

$$(3x^2+7y^2)dx-(4x+6y)xdy=0 \iff (3x^2+7y^2)dx=(4x+6y)xdy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+7y^2}{(4x+6y)x} \iff \boxed{y'=\frac{3+7\frac{y^2}{x^2}}{4+6\frac{y}{x}}}$$ - *однородное ДУ первого порядка* относительно

функции $y(x)$, так как имеет вид $y'=f(\frac{y}{x})$.

Теоретический метод решения: заменить $\boxed{\frac{y}{x}=z(x)}$, тогда $y=x\cdot z(x),\ \ y'=z+x\cdot z'$.

Выполняем эту замену в однородном ДУ и получаем ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $z(x)$:

$$y'=\frac{3+7\frac{y^2}{x^2}}{4+6\frac{y}{x}} \iff z+x\cdot z'=\frac{3+7\frac{x^2\cdot z^2}{x^2}}{4+6\frac{x\cdot z}{x}} \iff z+x\cdot z'=\frac{3+7z^2}{4+6z} \iff x\cdot z'=\frac{3+7z^2}{4+6z}-z$$

$$\iff x\cdot z'=\frac{3+7z^2-4z-6z^2}{4+6z} \iff x\cdot z'=\frac{3-4z+z^2}{4+6z} \iff \frac{dz}{dx}\cdot x=\frac{3-4z+z^2}{4+6z} \iff$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(4+6z)}{3-4z+z^2}dz=\dfrac{dx}{x} \iff \displaystyle\int\frac{(4+6z)}{3-4z+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}+C \\ 3-4z+z^2=0-\text{это равенство может давать особые решения}\end{array}\right.$$

вычисление интеграла, стоящего в левой части равенства:

$$\int\frac{6z+4}{3-4z+z^2}dz=\int\frac{(2z-4)\cdot 3+16}{3-4z+z^2}dz=3\int\frac{d(z^2-4z+3)}{z^2-4z+3}dz+16\int\frac{d(z-2)}{(z-2)^2-1}=$$

$$3\ln\left|z^2-4z+3\right|+16\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2-1}{z-2+1}\right|=3\ln\left|(z-1)(z-3)\right|+8\ln\left|\frac{z-3}{z-1}\right|=$$

$$3\ln|z-1|+3\ln|z-3|+8\ln|z-3|-8\ln|z-1|=11\ln|z-3|-5\ln|z-1|;$$

$11\ln|z-3|-5\ln|z-1|=\ln|x|+C$ - это общий интеграл ДУ относительно функции $z(x)$.

Выполняем обратную замену, подставив в общий интеграл $z=\dfrac{y}{x}$:

$$11\ln\left|\frac{y}{x}-3\right|-5\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|=\ln|x|+C \iff 11\ln\left|\frac{y-3x}{x}\right|-5\ln\left|\frac{y-x}{x}\right|=\ln|x|+C\ .$$

Нахождение общего решения $y(x,c)$ из последнего равенства затруднительно, поэтому для ответа ограничимся общим интегралом, но преобразуем его к более простому виду без логарифмов:

$$11\ln|y-3x|-11\ln|x|-5\ln|y-x|+5\ln|x|=\ln|x|+C \iff$$

$11\ln|y-3x|-5\ln|y-x|=7\ln|x|+\ln C_1$, где $C_1>0 \iff \ln\left|\dfrac{(y-3x)^{11}}{(y-x)^5}\right|=\ln\left|C_1x^7\right| \iff$

$\dfrac{(y-3x)^{11}}{(y-x)^5}=\pm C_1x^7 \iff \boxed{(y-3x)^{11}=Cx^7(y-x)^5,\ C\neq 0}$, где $C=\pm C_1$.

Дополнительно разберёмся с равенством $3-4z+z^2=0$, которое получалось на этапе разделения переменных в решении ДУ относительно функции z; это равенство может дать особые решения исходного ДУ:

$$3-4z+z^2=0 \iff \left[\begin{array}{l} z=3 \\ z=1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{y}{x}=3 \\ \dfrac{y}{x}=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=x \end{array}\right.;$$

чтобы проверить, являются ли эти функции решениями исходного ДУ, их следует подставить в первоначальное уравнение «до делений»:

$$(3x^2+7y^2)dx=(4x+6y)xdy \underset{y=3x,\ dy=3dx}{\Rightarrow} (3x^2+7\cdot 9x^2)dx=(4x+6\cdot 3x)x\cdot 3dx \iff$$

$66x^2dx=66x^2dx$ - верно при любых x =>

функция $y=3x$ удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению, следовательно, является его решением; сопоставив это решение с общим интегралом данного ДУ, видим, что оно получается из общего интеграла при значении $C=0$; поэтому функция $y=3x$ особым решением не является, но в общий интеграл следует подключить значение $C=0$.

Аналогично функцию $y=x$ подставим в исходное ДУ «до делений»:

$$(3x^2+7y^2)dx=(4x+6y)xdy \underset{y=x,\ dy=dx}{=>} (3x^2+7\cdot x^2)dx=(4x+6\cdot x)x\cdot dx \ <=>$$

$10x^2dx=10x^2dx$ - верно при любых x =>

функция $y=x$ также является решением исходного ДУ; но эта функция не получается из общего интеграла ни при каком числовом значении произвольной постоянной C; поэтому функцию $y=x$ следует записать в ответ как особое решение.

Ответ по задаче 1.2: $\left[\begin{array}{l}(y-3x)^{11}=Cx^7(y-x)^5, \text{ где } C\in\mathbb{R} - \text{общий интеграл},\\ y=x - \text{особое решение.}\end{array}\right.$

1.3. $(y'')^2=y'$, $y|_{x=1}=3$, $y'|_{x=1}=0$

Имеем ДУ второго порядка относительно функции $y(x)$, которое относится к типу ДУ, *допускающих понижение порядка*, так как не содержит в явном виде аргумент x (теоретический вид дифференциальных уравнений этого типа такой: $F(y,y',y'')=0$).

В соответствии с теоретическим методом решения выполняем следующую замену: $\boxed{y'_x=z(y)}$ => $y''_x=(z(y))'_x=z_y\cdot y_x$ => $\boxed{y''_x=z'_y\cdot z}$.

ДУ: $(y'')^2=y'$ <=> $\left(z'_y\cdot z\right)^2=z$ <=> $\left(z'_y\right)^2\cdot z^2=z$ <=>

$$\left[\begin{array}{l} z'_y=\dfrac{1}{\sqrt{z}} - \text{ДУ с разделяющимися переменными}\\ z=0 \ => \ y=const;\end{array}\right.$$

решаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$z'_y=\frac{1}{\sqrt{z}} \ <=> \ \frac{dz}{dy}=\frac{1}{\sqrt{z}} \ <=> \ \sqrt{z}dz=dy \ <=> \ \int\sqrt{z}dz=\int dy+C \ <=> \ \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}=y+C \ <=>$$

$z^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}y+C_1$ => $\boxed{z(y)=\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}}$ (в выкладках заменено $\frac{2}{3}C=C_1$).

Так как $z(y)=y'_x$, то получено, что $y'_x=\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}$ <=> $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}$ -

это ДУ I порядка с разделяющимися переменными относительно функции $y(x)$, имеющее тип «с разделяющимися переменными»;

разделяем переменные и интегрируем обе части равенства с добавлением постоянной:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}}=dx \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dy}{\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{2}{3}}}=\int dx+C_2 \Leftrightarrow 3\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{1}{3}}=x+C_2 \Leftrightarrow \\ \frac{3}{2}y+C_1=0 \Rightarrow y=const; \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{3}{2}y+C_1\right)^{\frac{1}{3}}=x+C_2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y+C_1=\left(\frac{x}{2}+\frac{C_2}{2}\right)^3 \Rightarrow y=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{C_2}{2}\right)^3-\frac{2}{3}C_1;$$

сделаем переобозначение произвольных постоянных C_1 и C_2, включив в них постоянные множители: $\frac{C_2}{2}$ заменим на C_2 и $-\frac{2}{3}C_1$ - на C_1; в результате получим общее решение исходного ДУ в следующем виде:

$$\boxed{y(x,C_1,C_2)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}+C_2\right)^3+C_1}.$$

Функция $y=const$, которая дважды получалась в процессе решения, удовлетворяет исходному ДУ и является его особым решением, так как не получается из общего решения ни при каких значениях постоянных C_1 и C_2.

Решаем задачу Коши:

$y(1)=3,\ y'(1)=0$ - эти начальные условия подставляем в общее решение и в его производную:

$$y'=\frac{2}{3}\cdot 3\left(\frac{x}{2}+C_2\right)^2\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow y'=\left(\frac{x}{2}+C_2\right)^2;$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow 0=\left(\frac{1}{2}+C_2\right)^2 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{2};$$

$$y(1)=3 \Rightarrow 3=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+C_2\right)^3+C_1 \Rightarrow C_1=3;$$

подставляем найденные значения C_1 и C_2 в общее решение и получаем искомое частное решение: $\boxed{y=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^3+3}$.

Заметим, что поставленным начальным условием можно удовлетворить и особым решением: если $y=const$, то $y(1)=3$ и $y'(1)=0$; тогда получаем и особое частное решение $\boxed{y=3}$.

Таким образом, через заданную точку $M_0(1;3)$ проходят две интегральные линии данного дифференциального уравнения второго порядка.

Ответ по задаче 1.3: 1) $y(x, C_1, C_2) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} + C\right)^3 + C_2$ - общее решение,

$y = const$ - особое решение;

2) $y(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^3 + 3$ и $y = 3$ - искомые частные решения.

1.4. $\boldsymbol{2y'' - y' - y = 3x\ e^x,\ y|_{x=0} = 0,\ y'|_{x=0} = 2}$

Имеем дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $y(x)$; его тип определяем как *линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами*, так как структура данного ДУ согласуется с канонической формой $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$, в которой коэффициенты p, q – это числа, $f(x) = 3x\ e^x$.

На основании теоремы об общем решении дифференциального уравнения указанного типа, общее решение данного ДУ ищем в виде $\boxed{y = y_0 + \tilde{y}}$,
где y_0 – это общее решение соответствующего однородного ДУ,
$\tilde{y}$ – какое-нибудь частное решение данного неоднородного ДУ.

Найдем y_0: $2y'' - y' - y = 0$ - однородное ДУ, соответствующее данному неоднородному ДУ; на основании теоремы об общем решении линейного однородного ДУ имеем, что

$$\boxed{y_0 = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)},$$

где c_1 и c_2 -это произвольные постоянные, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - фундаментальная система частных решений (ФСЧР) этого однородного ДУ.

ФСЧР для линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами находится с помощью его характеристического уравнения:

$$2k^2 - k - 1 = 0 \quad <=> \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = -0{,}5 \end{array}\right.$$ - корни действительные различные =>

ФСЧР: $\begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = e^{-0{,}5x} \end{cases}$ => $\boxed{y_0(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0{,}5x}}$.

Найдём $\tilde{y}$: сначала анализируем правую часть исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) с целью установить, имеет ли она специальный вид:

$f(x) = 3xe^x$ – подходит под первый специальный вид $e^{ax} \cdot P_n(x)$,

в котором $\alpha = 1$, $P_1(x) = 3x$; при этом коэффициент α совпадает с одним из корней характеристического уравнения: $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В соответствии с теоретической рекомендацией, частное решение ЛНДУ с такой правой частью ищем в следующем виде:

$$\tilde{y} = e^{ax} \cdot Q_1(x) \cdot x => \boxed{\tilde{y} = e^x \cdot (Ax + B) \cdot x}.$$

Неопределённые коэффициенты A и B находим из условия, что $\tilde{y}$ удовлетворяет исходному ЛНДУ; при этом нахождение производных $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подстановку их в исходное ДУ выполняем в следующей удобной схеме:

$$\begin{array}{r|l} -1 & \tilde{y} = e^x \cdot (Ax^2 + Bx) \\ -1 & \tilde{y}' = e^x \cdot (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) \\ 2 & \tilde{y}'' = e^x \cdot (Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) \end{array}$$

так как $2\tilde{y}'' - \tilde{y}' - \tilde{y} \equiv 3x \cdot e^x$,

то $e^x(x^2(\underbrace{-A - A + 2A}_{0}) + x^1(\underbrace{-B - B - 2A + 2B + 4A + 4A}_{6A}) + x^0(\underbrace{-B + 2B + 2B + 4A}_{3B+4A})) \equiv 3x \cdot e^x$

<=> $6Ax + (3B + 4A) \equiv 3x$ <=> $\begin{cases} 6A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ 3B + 4A = 0 \Rightarrow 3B = -2 \Rightarrow B = -\frac{2}{3}; \end{cases}$

таким образом получено, что $\boxed{\tilde{y}(x) = e^x \cdot (\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}) \cdot x}$.

Выполним проверку найденного частного решения, используя ту же схему для записи вычислений:

$$\begin{array}{r|l} -1 & \tilde{y} = e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x) \\ -1 & \tilde{y}' = e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + x - \frac{2}{3}) = e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}) \\ 2 & \tilde{y}'' = e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + x - \frac{2}{3} + x - \frac{2}{3} + 1) = e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}) \end{array}$$

$2\tilde{y}'' - \tilde{y}' - \tilde{y} = e^x \cdot (x^2 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1) + x \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3}) + x^0 \cdot (\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = e^x \cdot 3x$ - верно,
следовательно, частное решение $\tilde{y}$ найдено правильно.

Общее решение исходного ЛНДУ находим суммированием y_0 и $\tilde{y}$:

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x)}.$$

Решаем задачу Коши:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x) \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 2 \end{cases}$$

подставляя поочерёдно начальные условия в общее решение и его производную, получаем систему уравнений для определения значений постоянных c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0,5\cdot 0} + e^0 \cdot (\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{2}{3}\cdot 0) = 0 \\ c_1 \cdot e^0 - \frac{1}{2} c_2 \cdot e^{-0,5\cdot 0} + e^0 \cdot (\frac{1}{2}0^2 - \frac{2}{3}0 + 0 - \frac{2}{3}) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{2}{3} = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \,|\cdot \frac{1}{2} \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}c_1 = \frac{8}{3} \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \frac{16}{9} \\ c_2 = -\frac{16}{9} \end{cases};$$

возвращаем числовые значения c_1 и c_2 в общее решение и получаем искомое частное решение, то есть такое частное решение, которое соответствует поставленным начальным условиям:

$$\boxed{y(x) = \frac{16}{9}\cdot e^x - \frac{16}{9}e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x)}.$$

Ответ по задаче 1.4: $y(x,c_1,c_2)_{общее} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x)$;

$y(x)_{частное} = \frac{16}{9}\cdot e^x - \frac{16}{9}e^{-0,5x} + e^x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x)$.

1.5. $y'' - 10y' + 25y = \frac{(x+2)e^{5x}}{x^2 - 1}$

Имеем *линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами* и правой частью, вид которой не является специальным (каноническая форма такого ДУ была приведена в задаче 1.4).

Теоретический метод решения: $\boxed{y = y_0 + \tilde{y}}$,

где y_0 - общее решение соответствующего однородного ДУ,

$\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного ДУ.

Найдем y_0: $y'' - 10y' + 25y = 0$ - ЛОДУ с постоянными коэффициентами =>

$\boxed{y_0 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2}$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - ФСЧР, c_1, c_2 - произвольные постоянные;

ФСЧР составляем по корням характеристического уравнения:

$k^2 - 10k + 25 = 0$ <=> $k_1 = k_2 = 5$ - случай равных действительных корней =>

ФСЧР: $y_1(x) = e^{5x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{5x}$ => $\boxed{y_0 = c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot x \cdot e^{5x}}$.

Найдём $\tilde{y}$ методом вариации произвольных постоянных, так как правая часть данного ЛНДУ не относится к функциям, имеющим специальный вид. Суть метода вариации состоит в том, что функцию $\tilde{y}$ берём в таком же виде, в котором получилась функция y_0, но произвольные постоянные c_1 и c_2 заменяем на функции от *x*:

$$\boxed{\tilde{y} = c_1(x)\cdot e^{5x} + c_2(x)\cdot x\cdot e^{5x}}$$

В соответствии с теоретической разработкой этого метода, производные функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ следует определять из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} c_1{}'\cdot y_1 + c_2{}'\cdot y_2 = 0 \\ c_1{}'\cdot y_1' + c_2{}'\cdot y_2' = f(x) \end{cases},$$

здесь $y_1(x),\ y_2(x)$ - ФСЧР соответствующего ЛОДУ,

$f(x)$ - правая часть данного ЛНДУ.

Составляем эту систему для данного ДУ, упрощаем её и находим её решение (существование и единственность которого гарантируется теорией метода вариации), используя, например, формулы Крамера:

$$\begin{cases} c_1{}'\cdot e^{5x} + c_2{}'\cdot e^{5x}\cdot x = 0 \\ c_1{}'\cdot e^{5x}\cdot 5 + c_2{}'\cdot e^{5x}\cdot(5x+1) = \dfrac{(x+2)\cdot e^{5x}}{x^2-1} \end{cases} \underset{:e^{5x}}{<=>} \begin{cases} c_1{}' + c_2{}'\cdot x = 0 \\ c_1{}'\cdot 5 + c_2{}'\cdot(5x+1) = \dfrac{x+2}{x^2-1} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & (5x+1) \end{vmatrix} = (5x+1) - 5x = 1 \neq 0$$ => система имеет единственное решение,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{(x+2)}{x^2-1} & (5x+1) \end{vmatrix} = -\frac{x\cdot(x+2)}{x^2-1}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & \dfrac{(x+2)}{x^2-1} \end{vmatrix} = \frac{x+2}{x^2-1} \quad =>$$

$$c_1{}' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{x\cdot(x+2)}{x^2-1}, \qquad c_2{}' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x(x+2}{x^2-1}$$ - это и есть решение системы, которое всегда следует подтвердить проверкой.

Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ восстанавливаются по их найденным производным с помощью неопределённого интеграла:

$$c_1(x) = \int c_1{}'(x)\cdot dx = -\int \frac{x(x+2)}{x^2-1}dx = -\int \frac{(x^2+2x+1)-1}{(x-1)\cdot(x+1)}dx = -\int\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)\cdot(x+1)} - \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$= -\int\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)dx = -\int\left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)dx =$$

$$=-\int\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx=-x-2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c_1^*=$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-x-\ln(x-1)^2+c_1^*=c_1(x)},$$ где c_1^*- константа интегрирования;

$$c_2(x)=\int c_2'(x)\cdot dx=\int\frac{x+2}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{(x-1)+1}{(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x^2-1}\right)dx=$$

$$=\boxed{\ln|x+1|+3\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c_2^*=c_2(x)},$$ где c_2^* - константа интегрирования.

Найденные функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ подставляем в формулу для $\tilde{y}$ и получаем:

$$\tilde{y}(x)=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-x-\ln(x-1)^2+c_1^*\right)\cdot e^{5x}+\left(\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c_2^*\right)\cdot x\cdot e^{5x};$$

так как $\tilde{y}$ - это какое-нибудь частное решение ЛНДУ, то константами интегрирования c_1^* и c_2^* можно распорядиться удобным образом, например, положить их равными нулю; в результате функция $\tilde{y}$ упростится к следующему виду:

$$\boxed{\tilde{y}(x)=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-x-\ln(x-1)^2\right)\cdot e^{5x}+\left(\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\cdot x\cdot e^{5x}}.$$

Общее решение исходного ЛНДУ находим суммированием функций y_0 и $\tilde{y}$ с дальнейшими упрощениями полученного выражения.

Ответ по задаче 1.5:

$$y(x,c_1,c_2)=\left(\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-x-\ln(x-1)^2\right)+\left(\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\cdot x+c_1+c_2\cdot x)\right)\cdot e^{5x}\ .$$

1.6. $y''+2y'+26y=\cos 5x-2\sin 5x+4e^{-x}$

Данное дифференциальное уравнение второго порядка имеет тип линейного неоднородного ДУ (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами. Уравнение такого типа уже встречалось в выполняемом задании, поэтому можно его каноническую форму не приводить и суть метода решения подробно не описывать. Ниже приводится краткое решение этого ДУ:

1) $y_{общее}=y_0+\tilde{y}$, где y_0 - общее решение соответствующего ЛОДУ,
$\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного ЛНДУ;

2) находим y_0: $y''+2y'+26y=0$ => $\boxed{y_0=c_1\cdot y_1+c_2\cdot y_2}$,
где $y_1(x), y_2(x)$ - это ФСЧР, c_1, c_2 - произвольные постоянные;

ФСЧР находим с помощью характеристического уравнения:

$k^2+2k+26=0 \Leftrightarrow k_{1,2}=-1\pm 5i$ - комплексно-сопряжённые корни
=> ФСЧР: $y_1(x)=e^{-x}\cos 5x$, $y_2(x)=e^{-x}\sin 5x$ => $\boxed{y_0(x,c_1,c_2)=e^{-x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)}$;

3) находим $\tilde{y}$: $f(x)=\cos 5x-2\sin 5x+4e^{-x}=f_1(x)+f_2(x)$, где
$f_1(x)=\cos 5x-2\sin 5x$ - подходит под второй специальный вид, так как имеет структуру выражения $e^{\alpha x}(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$, в котором $\alpha=0,\ \beta=5$,
$f_2(x)=4e^{-x}$ - подходит под первый специальный вид, так как имеет структуру выражения $e^{\alpha x}P_n(x)$, в котором $\alpha=-1,\ n=0$.

В этом случае нужно использовать *метод суперпозиции частных решений* ЛНДУ, в соответствии с которым частное решение $\tilde{y}$ нужно искать в виде суммы двух функций $\boxed{\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2}$, где $\tilde{y}_1$ - это частное решение ЛНДУ $y''+2y'+26y=f_1(x)$,
$\tilde{y}_2$ - это частное решение ЛНДУ $y''+2y'+26y=f_2(x)$.

Так как обе правые части $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют специальный вид, то каждая из функций $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ наиболее просто находится методом неопределённых коэффициентов. Поочерёдно находим эти функции, подбирая их вид в соответствии с теоретическими рекомендациями:

$\tilde{y}_1=A\cos 5x+B\sin 5x$, так как $\alpha=0,\beta=5 \Rightarrow \alpha\pm i\beta\neq k_{1,2}$;

подстановкой $\tilde{y}_1$ в ЛНДУ с правой частью $f_1(x)$ находим $A=\dfrac{21}{101},\ B=\dfrac{8}{101}$;

$\tilde{y}_2=Ae^{-x}$, так как $\alpha=-1\neq k_{1,2}$;

подстановкой $\tilde{y}_2$ в ЛНДУ с правой частью $f_2(x)$ находим $A=\dfrac{4}{25}$;

сложением найденных функций $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ определяем частное решение $\tilde{y}(x)$:

$$\boxed{\tilde{y}(x)=\frac{21}{101}\cos 5x+\frac{8}{101}\sin 5x+\frac{4}{25}e^{-x}}.$$

4) После определения функций y_0 и $\tilde{y}$ составляем общее решение исходного ЛНДУ по формуле $y=y_0+\tilde{y}$ и упрощаем функцию $y(x,c_1,c_2)$ к более лаконичному виду.

Ответ по задаче 1.6: $y(x,c_1,c_2)=e^{-x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x+\dfrac{4}{25})+\dfrac{1}{101}(21\cos 5x+8\sin 5x)$.

***Задание* 2**
Решить систему дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$$

Решение

Имеем систему двух обыкновенных ДУ первого порядка относительно функций $x(t)$ и $y(t)$. Реализуем решение системы *методом исключения одной из функций*, в результате получим ДУ второго порядка относительно другой функции. Будем исключать функцию $y(t)$, а функцию $x(t)$ оставим. Для этого первое уравнение системы дифференцируем по *t*:

$$x''_t = 5x' + 4y';$$

подставляем производную y', взятую из второго уравнения системы $y'_t = -2x + 11y$:

$$x''_t = 5x' + 4(-2x + 11y) \Leftrightarrow x''_t = 5x' - 8x + 44y \ ;$$

берем функцию y из первого уравнения исходной системы $y = \dfrac{x' - 5x}{4}$ и подставляем в последнее равенство:

$$x'' = 5x' - 8x + 44 \cdot \frac{x' - 5x}{4} \ \Leftrightarrow \ x'' - 16x' + 63x = 0;$$

исключение функции $y(t)$ состоялось и в результате получено ДУ второго порядка относительно только функции $x(t)$.

Находим функцию $x(t)$ как общее решение получившегося ДУ второго порядка, тип которого определяется как ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

$x'' - 16x' + 63x = 0 \Rightarrow x_{общее} = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$ где $x_1(t), x_2(t)$ - это ФСЧР;

характеристическое уравнение: $k^2 - 16k + 63 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 7,\ k_2 = 9;$

ФСЧР: $x_1(t) = e^{7t},\ x_2(t) = e^{9t}$ => $\boxed{x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t}}$.

Ищем вторую функцию $y(t)$, используя первое уравнение исходной системы $y = \dfrac{x' - 5x}{4}$ и подставляя в него найденную функцию $x(t, c_1, c_2)$:

$$y = \frac{1}{4}(7c_1 e^{7t} + 9c_2 e^{9t} - 5(c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t})) \Leftrightarrow \boxed{y(t, c_1, c_2) = 0{,}5c_1 e^{7t} + c_2 e^{9t}}.$$

Правильность найденных искомых функций всегда можно подтвердить проверкой.

Так как данная система состоит из линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то её можно представить и решить *в матричной форме*:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{X'_t = A \cdot X(t)},\quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix},\quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы ЛОДУ второго порядка по аналогии с одним уравнением такого же типа составляется как линейная комбинация частных решений системы, которые являются линейно независимыми:

$$X(t) = c_1 \cdot X_1(t) + c_2 \cdot X_2(t), \quad X_2(t) \neq const \cdot X_1(t),\ c_1, c_2 \text{ - произвольные постоянные.}$$

Так же, как и в случае одного ЛОДУ с постоянными коэффициентами, частные решения системы ищутся в виде экспонент:

$$x(t) = \alpha_1 \cdot e^{kt},\ \ y(t) = \alpha_2 \cdot e^{kt} \ \Rightarrow\ X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{kt} \ \Rightarrow\ X'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot ke^{kt}.$$

Подставляем $X(t)$ и $X'(t)$ в систему, записанную в матричной форме, и проводим преобразования с целью получить условия на параметры взятых экспонент:

$$X'_t = A \cdot X(t) \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot ke^{kt} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{kt} \ \Leftrightarrow\ (A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное матричное равенство представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно числовых величин α_1, α_2. Из алгебры известно, что такая система имеет нетривиальное (ненулевое) решение только в случае, когда её определитель равен нулю, то есть

$$\det(A - kE) = 0.$$

Это равенство называется характеристическим уравнением системы ЛОДУ с постоянными коэффициентами, оно определяет значения параметра k в экспонентах. После решения этого уравнения нужно находить величины α_1, α_2 как решения однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Составляем характеристическое уравнение для рассматриваемой системы и решаем его:

$$\det\begin{pmatrix} 5-k & 4 \\ -2 & 11-k \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow (5-k)\cdot(11-k) + 8 = 0 \ \Leftrightarrow\ k^2 - 16k + 63 = 0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} k_1 = 7 \\ k_2 = 9 \end{array}\right. .$$

При $k_1 = 7$ составляем и решаем систему относительно α_1, α_2, в результате получаем $X_1(t)$:

$$(A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \forall \text{\textit{число}} \\ \alpha_2 = 0{,}5\alpha_1 \end{cases};$$

так как числа α_1, α_2 используются для построения частного решения $X_1(t)$, то можно взять

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0{,}5 \ \Rightarrow\ X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot e^{7t}.$$

При $k_2 = 9$ аналогично получаем частное решение $X_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \forall \text{\textit{число}} \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \ \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \ \Rightarrow\ X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t}.$$

Составляем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ X(t)=c_1\cdot X_1(t)+c_2\cdot X_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}\cdot e^{7t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{9t} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=c_1e^{7t}+c_1e^{9t} \\ y(t)=0,5c_1e^{7t}+c_1e^{9t} \end{cases}.$$

Понятно, что оба рассмотренных метода решения данной системы дифференциальных уравнений должны приводить к одинаковым результатам.

Ответ по заданию 2: $\begin{cases} x(t,c_1,c_2)=c_1e^{7t}+c_2e^{9t} \\ y(t,c_1,c_2)=0,5c_1e^{7t}+c_2e^{9t} \end{cases}$

***Задание* 3**

Построить интегральные линии данного дифференциального уравнения первого порядка. Найти уравнение интегральной линии, которая проходит через точку M_0. Проанализировать теорему существования и единственности частных решений для данного ДУ:

$$xy'=x^2+y,\ M_0(4;1).$$

Решение

Интегральные линии дифференциального уравнения – это графическое изображение общего решения ДУ; для дифференциального уравнения первого порядка интегральные линии представляют собой однопараметрическое семейство линий $y=y(x,c)$ на плоскости *XOY*.

Для построения интегральных линий находим общее решение данного ДУ:

$xy'=x^2+y$ <=> $y'=x+\dfrac{y}{x}$ <=> $y'-\dfrac{y}{x}=x$ - линейное ДУ вида $y'+p(x)\cdot y=f(x)$ =>

метод решения: $y(x)=U(x)\cdot V(x)$ <=> $y'_x=U'_x\cdot V+U\cdot V'_x$;

ДУ: $y'-\dfrac{y}{x}=x$ <=> $U'\cdot V+U\cdot V'-\dfrac{U\cdot V}{x}=x$ <=> $U'\cdot V+U\cdot\left(V'-\dfrac{V}{x}\right)=x$;

ДУ для функции $V(x)$: $V'-\dfrac{V}{x}=0$ <= $\dfrac{dV}{dx}=\dfrac{V}{x}$ <=> $\int\dfrac{dV}{V}=\int\dfrac{dx}{x}+c$ <=>

$$\ln|V|=\ln|x|+\ln C_1 \iff V=\underbrace{\pm C_1}_{=1}\cdot x \iff V(x)=x;$$

ДУ для функции $U(x)$: $U'\cdot x=x$ <=> $\dfrac{dU}{dx}\cdot x=x$ <=> $\int dU=\int dx+C_2$ <=> $U=x+C$;

общее решение исходного ДУ: $y=(x+C)\cdot x$ <=> $\boxed{y(x,\mathrm{C})=x^2+C\cdot x}$.

Геометрически общему решению соответствует однопараметрическое семейство парабол, ветви которых направлены вверх и которые пересекают ось *OX* в точках $x=0$ и $x=-C$. Изменяя значения произвольной постоянной C, получим несколько интегральных линий данного ДУ (рис. 1):

если $C=0$, то $y=x^2$ - парабола с вершиной $(0;0)$;

если $C=1$, то $y=x^2+x$ - парабола с вершиной $(-\frac{1}{2};\frac{1}{4})$;

если $C=2$, то $y=x^2+2x$ - парабола с вершиной $(-1;1)$;

если $C=-1$, то $y=x^2-x$ парабола с вершиной $(\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$;

заметим, что все параболы, имеющие уравнение $y=x^2+Cx$, проходят через начало координат.

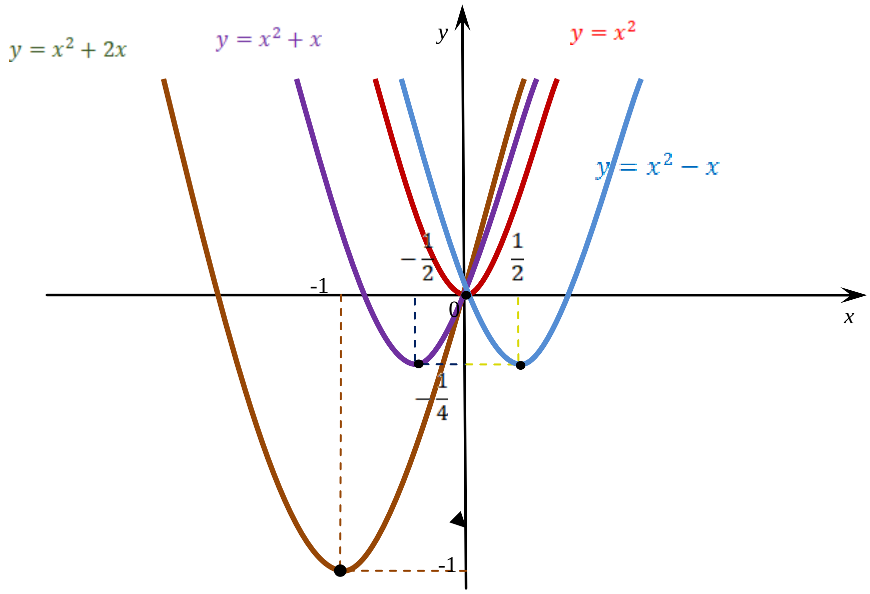
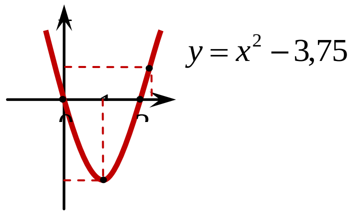


Рис. 1

Находим интегральную линию, проходящую через заданную точку $M_0(4;1)$; для этого подставим $x=4$, $y=1$ в найденное общее решение и определим значение C, соответствующее начальному условию $y|_{x=4}=1$:



$$\begin{cases} y=x^2+C\cdot x \\ x=4, y=1 \end{cases} \Rightarrow 1=16+4C \Rightarrow C=-\frac{15}{4}=-3{,}75;$$

возвращая полученное значение $C=-3{,}75$ в общее решение, получим частное решение данного ДУ, соответствующее поставленному начальному условию:

$$\boxed{y=x^2-3{,}75x}.$$

Геометрически этому частному решению соответствует парабола, имеющая вершину в точке (1,875;-3,5) и проходящая через точку M_0(4;1), её изображение приведено на рис. 2.

Проанализируем теорему существования и единственности частных решений для данного ДУ первого порядка. Для этого сначала сформулируем эту теорему:

Если выполняются следующие условия:

1) дано ОДУ 1-го порядка, записанное в канонической форме $y' = f(x,y)$,
2) дана фиксированная точка $(x_0; y_0)$, которой соответствует начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$,
3) функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$,

то существует единственное частное решение ОДУ, удовлетворяющее данному начальному условию, то есть существует единственная интегральная линия ОДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Проанализируем непрерывность функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ для данного ОДУ:

$$y' = x + \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; f(x,y) = x + \frac{y}{x},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow$$

обе функции непрерывны для всех точек $(x; y)$, кроме тех точек, в которых $x = 0$.

По теореме существования и единственности заключаем, что:

1) через каждую точку (x_0, y_0), у которой $x_0 \neq 0,$ проходит единственная интегральная линия данного ОДУ;
2) точки $(0; y_0)$ не удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности частных решений, поэтому они являются *особыми точками* для данного ОДУ; через каждую из этих точек может проходить или несколько интегральных линий, или ни одной, но может быть и одна интегральная линия.

В данной задаче через особую точку $(0;0)$ проходят все интегральные линии, через остальные точки $(0; y)$, у которых $y \neq 0$, не проходит ни одна интегральная линия.

Ответ по заданию 3:

1) $y(x,\mathrm{C}) = x^2 + Cx$ - уравнение множества интегральных линий ОДУ $xy' = x^2 + y$; несколько интегральных линий построены на рис. 1;

2) $y(x) = x^2 - 3{,}75x$ - уравнение интегральной линии, проходящей через точку $M_0(4;1)$; эта линия построена на рис. 2;

3) в результате анализа теоремы существования и единственности частных решений получено, что через каждую точку $M_0(x; y)$, у которой $x \neq 0$, проходит единственная интегральная линия; точки вида $(0; y)$, заполняющие полностью ось *OY*, являются особыми точками данного ОДУ.

***Задание* 4**

Найдите изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \ge 0$:

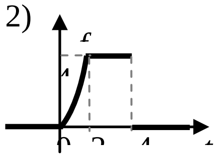
1) $f(t) = t \cdot \sin^2 t$; 2) $f(t) = \begin{cases} t^2, \ 0 \le t < 2 \\ 4, \ 2 \le t \le 4 \\ 0\ , \ t > 4 \end{cases}$; 3) $f(t) = \begin{cases} t-1\ , \ 0 \le t \le 1 \\ 1\ , 1 \le t \le 3 \end{cases}$; $T = 3.$.

Решение

1) $f(t) = t \cdot \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(t - t\cos 2t) \; ¤ \; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{p}{p^2+4}\right)'\right) = \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{4-p^2}{2(p^2+4)^2} = F(p)$;

в решении использованы свойство линейности преобразования Лапласа, теорема о дифференцировании изображения и табличные изображения функций t , cos2*t*.

2)



$$f(t) = t^2\big(\sigma(t) - \sigma(t-2)\big) + 4\big(\sigma(t-2) - \sigma(t-4)\big) =$$

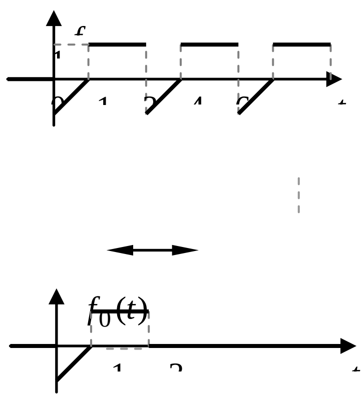
$$= t^2\sigma(t) - t^2\sigma(t-2) + 4\sigma(t-2) - 4\sigma(t-4) \; ¤$$

$$¤ \; \frac{2}{p^3} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right)e^{-2p} + \frac{4}{p}e^{-2p} - \frac{4}{p}e^{-4p} =$$

$$= \frac{2}{p^3} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2}\right)e^{-2p} - \frac{4}{p}e^{-4p}.$$

В решении использованы линейность преобразования Лапласа, теорема запаздывания и табличные изображения функций t^2, *t*, 1.

3)



Составляем функцию $f_0(t)$: $f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases} = \begin{cases} t-1, \ 0 \le t < 1 \\ 1, \ \ 1 \le t \le 3 \\ 0, \ \ t > 3 \end{cases}$.

Записываем $f_0(t)$ с помощью функции Хевисайда и находим ее изображение $F_0(p)$:

$$f_0(t)=\left(t-1\right)\cdot\left(\sigma(t)-\sigma(t-1)\right)+\sigma(t-1)-\sigma(t-3)=$$
$$=\left(t-1\right)\sigma(t)-\left(t-1\right)\sigma(t-1)+\sigma(t-1)-\sigma(t-3)\ \text{¤}$$
$$\text{¤}\ \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-3p}=\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}\right)-\frac{1}{p}\left(1-e^{-p}+e^{-3p}\right)=F_0(p).$$

Используя формулу для изображения периодического оригинала с периодом $T=3$, находим изображение $F\left(p\right)$ данной функции-оригинала $f\left(t\right)$:

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-Tp}}=\frac{\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}\right)-\frac{1}{p}\left(1-e^{-p}+e^{-3p}\right)}{1-e^{-3p}}.$$

В решении использованы: линейность преобразования Лапласа, теорема запаздывания, теорема об изображении периодического сигнала, табличные изображения функций-оригиналов *t,* 1.

Ответ к заданию 4: 1) $F(p)=\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{4-p^2}{2(p^2+4)^2}$;

2) $F(p)=\dfrac{2}{p^3}-\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{4}{p^2}\right)e^{-2p}-\dfrac{4}{p}e^{-4p}$;

3) $F(p)=\dfrac{\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}\right)-\frac{1}{p}\left(1-e^{-p}+e^{-3p}\right)}{1-e^{-3p}}.$

***Задание* 5**

Восстановите функции-оригиналы, если даны их изображения по Лапласу:

1) $F(p)=\dfrac{1-2p}{p^2+4p+20}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p}{(p+2)^2(p^2+4)}$; 3) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)^2}$ - с помощью свертки.

Решение

1) $F(p)=\dfrac{1-2p}{p^2+4p+20}\cdot e^{-p}$;

имея в виду теорему запаздывания для дальнейшего применения, восстановим сначала оригинал для части данного изображения, которая без экспоненты:

$$F(p)=\frac{1-2p}{p^2+4p+20}=\frac{1-2p}{(p+2)^2+16}=-2\frac{p+2}{(p+2)^2+4^2}+\frac{5}{4}\frac{4}{(p+2)^2+4^2}\ \text{¤}$$
1)
$$\text{¤}\ -2e^{-2t}\cos 4t+\frac{5}{4}e^{-2t}\sin 4t=e^{-2t}(-2\cos 4t+\frac{5}{4}\sin 4t)=f(t).$$

Были использованы свойства единственности и линейности преобразования Лапласа, теорема затухания и следующие табличные соответствия оригиналов и изображений:

$$\cos\left(\omega t\right)\ \text{¤}\ \frac{p}{p^2+\omega^2},\quad \sin\left(\omega t\right)\ \text{¤}\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Теперь учтем множитель в виде экспоненты e^{-p}, который в соответствии с теоремой запаздывания означает, что восстановленный выше оригинал $f(t)$ следует записать как запаздывающий на величину $\tau = 1$:

если $F(p)$ ¤ $f(t)\cdot\sigma(t)$, то $F(p)\cdot e^{-\tau p}$ ¤ $f(t-\tau)\cdot\sigma(t-\tau)$;

поэтому для изображения $F(p) = \dfrac{1-2p}{p^2+4p+20}\cdot e^{-p}$ оригиналом является функция

$$f(t) = e^{-2(t-1)}\cdot(-2\cos(4(t-1)) + \frac{5}{4}\sin(4(t-1)))\cdot\sigma(t-1).$$

2) $F(p) = \dfrac{p}{(p+2)^2(p^2+4)}$;

разложим данную правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} = \frac{A(p+2)(p^2+4) + B(p^2+4) + (Cp+D)(p+2)^2}{(p+2)^2(p^2+4)} \quad \Rightarrow$$

$$p = A(p+2)(p^2+4) + B(p^2+4) + (Cp+D)(p+2)^2 \Rightarrow$$

при $p=-2$: $-2 = 8B \Leftrightarrow B = -\dfrac{1}{4}$;

$$\begin{array}{l} \textit{коэф. при } p^3: \\ \textit{коэф. при } p^2: \\ \textit{коэф. при } p^0: \end{array} \begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = 2A + B + 4C + D \\ 0 = 8A + 4B + 4D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -A \\ 2A + 4C + D = \dfrac{1}{4} \\ 8A + 4D = 1 \Rightarrow D = \dfrac{1-8A}{4}; \end{cases}$$

второе уравнение: $2\cdot A - 4\cdot A + \dfrac{1}{4} - 2\cdot A = \dfrac{1}{4} \Rightarrow -4\cdot A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow D = \dfrac{1}{4}$.

$$\frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} = \frac{-\frac{1}{4}}{(p+2)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{p^2+4} \overset{\textit{проверка}}{=} \frac{-\frac{1}{4}(p^2+4) + \frac{1}{4}(p^2+4p+4)}{(p+2)^2(p^2+4)} =$$

$$= \frac{p}{(p+2)^2(p^2+4)} - \textit{верно.}$$

$$F(p) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{8}\frac{2}{p^2+4} \quad ¤ \quad -\frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}\sin 2t = f(t).$$

Использованы единственность и линейность преобразования Лапласа, а также два табличных соответствия оригиналов и изображений:

$$te^{at} \text{ ¤ } \frac{1}{(p-a)^2}, \quad \sin(\omega t) \text{ ¤ } \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

3)

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+9)^2} = \frac{p}{p^2+9} \cdot \frac{p}{p^2+9};$$

Используем теорему об изображении свертки, суть которой состоит в том, что произведение изображений соответствует свёртке оригиналов:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \text{ ¤ } f_1(t) * f_2(t);$$

при этом операция свёртки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяется следующим интегралом:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x)dx;$$

(существуют также таблицы свёрток, с помощью которых можно проверить правильность нахождения интеграла).

Так как известно, что $\dfrac{p}{p^2+9}$ ¤ $\cos 3t$, то в рассматриваемом примере по указанной теореме получим, что для данного изображения $F(p)$ оригиналом является такая функция:

$$f(t) = \cos 3t * \cos 3t = \int_0^t \cos 3x \cdot \cos(3t-3x)dx = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos 3t + \cos(6x-3t))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 3t \int_0^t dx + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(6x-3t)dx = \frac{1}{2}\cos 3t \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\sin(6x-3t)\Big|_{x=0}^{x=t} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 3t \cdot t + \frac{1}{12}(\sin 3t - \sin(-3t)) = \frac{1}{2}\cos 3t \cdot t + \frac{1}{6}\sin 3t.$$

Проверить результат нахождения свёртки можно, например, обратным действием, то есть нахождением изображения от восстановленного оригинала $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos 3t \cdot t + \frac{1}{6}\sin 3t \text{ ¤ } -\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+9}\right)' + \frac{1}{6}\frac{3}{p^2+9} = -\frac{1}{2}\frac{9-p^2}{(p^2+9)^2} + \frac{1}{6}\frac{3}{p^2+9} = \frac{p^2}{(p^2+9)^2} = F(p).$$

Заметим, что если в записи теоретических фактов или в выкладках опускается написание единичной функции Хевисайда, то по умолчанию понимается «включение» всех функций-оригиналов от значения $t = 0$.

Ответ к заданию 5: 1) $f(t) = e^{-2(t-1)} \cdot (-2\cos(4(t-1)) + \frac{5}{4}\sin(4(t-1))) \cdot \sigma(t-1)$;

2) $f(t) = (-\frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}\sin 2t) \cdot \sigma(t)$;

3) $f(t) = \cos 3t * \cos 3t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3t + t\cos 3t\right) \cdot \sigma(t)$.

***Задание* 6**

Решите операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердите проверками.

1) $x'' - x' = e^t \cdot \sigma(t-2), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$ 2) $\begin{cases} x' + 4x = y \\ y' + y = -2x, \; x(0) = 2, \; y(0) = 3. \end{cases}$

Решение

1) $x'' - x' = e^t \cdot \sigma(t-2), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

Будем искать изображение по Лапласу искомого частного решения ОДУ: $x(t) \fallingdotseq X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получим, что

$$x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$x''(t) \fallingdotseq p(pX(p) - 1) - x'(0) = p^2X(p) - p - 2;$$

здесь учтено, что $x(0) = 1$ и $x'(t) = 2$ из начальных условий.

Найдем изображение правой части дифференциального уравнения, используя теорему запаздывания: $f(t)\cdot\sigma(t) \fallingdotseq F(p) \Leftrightarrow f(t-\tau)\cdot\sigma(t-\tau) \fallingdotseq F(p)\cdot e^{-p\tau}$, которая для данной в ДУ запаздывающей правой части даёт следующий результат:

$$e^t\sigma(t) \fallingdotseq \frac{1}{p-1} \Rightarrow e^t\sigma(t-2) = e^2e^{t-2}\sigma(t-2) \fallingdotseq e^2 \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p}.$$

Составим и решим операционное уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению, используя при этом линейность и единственность преобразования Лапласа:

$$p^2X(p) - p - 2 - \left(pX(p) - 1\right) = e^2 \cdot \frac{1}{(p-1)^2} \cdot e^{-2p} \quad \Rightarrow \quad X(p)\cdot\left(p^2 - p\right) = e^2 \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p} + p + 2 - 1 \quad \Rightarrow$$
$$X(p) = e^2 \cdot \frac{1}{p^2 - p} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot e^{-2p} + \frac{p+1}{p^2 - p}.$$

Таким образом, найдено изображение по Лапласу искомого частного решения ДУ.

Подготовим найденное изображение $X(p)$ к восстановлению оригинала, выполнив сначала разложение каждой правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(p^2 - p)(p-1)} = \frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}; \qquad \frac{p+1}{p^2 - p} = \frac{-1}{p} + \frac{2}{p-1}.$$

Теперь для каждой из этих дробей легко восстановить оригинал, используя линейность преобразования Лапласа и табличное соответствие $e^{at}t^n \cdot \sigma(t) \fallingdotseq \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ при n=0,1,2:

$$e^2 \cdot \frac{1}{p^2 - p} \cdot \frac{1}{p-1} = e^2 \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \fallingdotseq e^2(1 - e^t + e^t \cdot t)\cdot\sigma(t);$$

$$\frac{p+1}{p^2-p}=\frac{-1}{p}+\frac{2}{p-1} \quad ¤ \quad (-1+2e^t)\cdot\sigma(t).$$

Но первая дробь входит в изображение $X(p)$ ещё с множителем e^{-2p}, поэтому для восстановления оригинала всего первого слагаемого в $X(p)$ нужно снова использовать теорему запаздывания (в обратную сторону):

$$e^2\cdot\frac{1}{p^2-p}\cdot\frac{1}{p-1} \quad ¤ \quad e^2(1-e^t+e^t\cdot t)\cdot\sigma(t) \Leftrightarrow$$
$$e^2\cdot\frac{1}{p^2-p}\cdot\frac{1}{p-1}\cdot e^{-2p} \quad ¤ \quad e^2(1-e^{t-2}+e^{t-2}(t-2))\cdot\sigma(t-2)=(e^2-e^t+e^t(t-2))\cdot\sigma(t-2).$$

Восстановив оригиналы для каждого слагаемого в $X(p)$, записываем оригинал $x(t)$, соответствующий всему изображению $X(p)$:

$$x(t)=(e^2+e^t\cdot(t-3))\cdot\sigma(t-2)+(-1+2e^t)\cdot\sigma(t).$$

Искомое решение задачи Коши для данного ОДУ найдено. Остаётся только подтвердить его проверкой. Начинать проверку рекомендуется с проверки начальных условий, как их проверить проще с учётом следующих двух очевидных фактов относительно единичной функции Хевисайда:

- значение $\sigma(t-2)$ при значении $t=0$ равно нулю,
- при дифференцировании эта функция ведёт себя как постоянная.

Тогда легко видеть, что оба начальные условия выполняются: $x(0)=1,\ x'(0)=2.$ Теперь нужно дифференцировать дважды функцию $x(t)$ и подставлять $x''(t),\ x'(t)$ в исходное ОДУ:

$x'(t)=e^t(t-2)\cdot\sigma(t-2)+2e^t\cdot\sigma(t);$

$x''(t)=e^t(t-1)\cdot\sigma(t-2)+2e^t\cdot\sigma(t);$

ОДУ: $x''-x'=e^t\cdot\sigma(t-2) \quad \Rightarrow \sigma(t-2)\cdot e^t(t-1-t+2)+\sigma(t)\cdot e^t(2-2)=\sigma(t-2)\cdot e^t$

- уравнение тоже удовлетворяется, следовательно, его частное решение найдено верно.

2) $\begin{cases} x'+4x=y \\ y'+y=-2x; \end{cases}$ $\qquad x(0)=2\ ,\ y(0)=3.$

Пусть $x(t)\ ¤\ X(p),\quad y(t)\ ¤\ Y(p);$

Тогда $x'(t)\ ¤\ pX-x(0)=pX-2,\quad y'(t)\ ¤\ pY-y(0)=pY-3.$

Система операционных уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям данной системы, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} pX-2+4X=Y \\ pY-3+Y=-2X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X\cdot(p+4)-Y=2 \\ 2X+Y\cdot(p+1)=3 \end{cases}.$$

Решим систему по формулам Крамера, так как она является системой линейных алгебраических уравнений относительно *X* и *Y*:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+4 & -1 \\ 2 & p+1 \end{vmatrix}=(p+4)(p+1)+2=p^2+5p+6=(p+2)(p+3);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & p+1 \end{vmatrix}=2p+2+3=2p+5; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} p+4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3p+12-4=3p+8;$$

$$X=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2p+5}{(p+2)(p+3)}; \qquad Y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{3p+8}{(p+2)(p+3)}.$$

Для восстановления оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ представим их изображения $X(p)$ и $Y(p)$ в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$X(p)=\frac{2p+5}{(p+2)(p+3)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p+3} \quad \Rightarrow \quad 2p+5=A(p+3)+B(p+2) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \textit{при} \quad p=-3: \quad -1=-B \quad \Rightarrow \quad B=1 \\ \textit{при} \quad p=-2: \quad 1=A \quad \Rightarrow \quad A=1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad X(p)=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+3} \text{ ¤ } (e^{-2t}+e^{-3t})\sigma(t)=x(t);$$

$$Y(p)=\frac{3p+8}{(p+2)(p+3)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p+3} \quad \Rightarrow \quad 3p+8=A(p+3)+B(p+2) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \textit{при} \quad p=-3: \quad -1=-B \quad \Rightarrow \quad B=1 \\ \textit{при} \quad p=-2: \quad 2=A \quad \Rightarrow \quad A=2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Y(p)=\frac{2}{p+2}+\frac{1}{p+3} \text{ ¤ } (2e^{-2t}+e^{-3t})\sigma(t)=y(t).$$

Проверка:

$$\begin{cases} x(t)=(e^{-2t}+e^{-3t})\sigma(t) \\ y(t)=(2e^{-2t}+e^{-3t})\sigma(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x(0)=2 \ - \ \textit{верно}; \\ y(0)=3 \ - \ \textit{верно}. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x'(t)=(-2e^{-2t}-3e^{-3t})\sigma(t) \\ y'(t)=(-4e^{-2t}-3e^{-3t})\sigma(t) \end{cases}$$

Проверяем по очереди каждое уравнения исходной системы ДУ, при этом множитель $\sigma(t)$ можно при подстановке опустить, так этот множитель является общим для всех слагаемых:

$$x'+4x=y \quad \Rightarrow \quad -\underline{2e}^{-2t}-\underline{\underline{3e}}^{-3t}+\underline{4e}^{-2t}+\underline{\underline{4e}}^{-3t}=2e^{-2t}+e^{-3t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2e^{-2t}+e^{-3t}=2e^{-2t}+e^{-3t} \quad - \ \textit{верно при} \ \forall t;$$

$$y'+4y=-2x \quad \Rightarrow \quad -\underline{4^{-2t}}-\underline{\underline{3e}}^{-3t}+\underline{2e}^{-2t}+\underline{\underline{e}}^{-3t}=-2(e^{-2t}+e^{-3t}) \quad - \ \textit{верно при} \ \forall t.$$

Ответ к заданию 6: 1) $x(t)=(e^2+e^t\cdot(t-3))\cdot\sigma(t-2)+(-1+2e^t)\cdot\sigma(t)$;

$$2)\begin{cases} x(t)=(e^{-2t}+e^{-3t})\sigma(t) \\ y(t)=(2e^{-2t}+e^{-3t})\sigma(t) \end{cases}.$$

Приложение А. Варианты заданий

Задание 1. Определить тип обыкновенного дифференциального уравнения, найти его общее решение и найти частное решение, если поставлены начальные условия.

№ вар.	Диф. уравнения 1.1, 1.2, 1.3.	Диф. уравнения 1.4, 1.5, 1.6
1	**1.1**. $(x+y)dx=(2x-2y)dy$, $y\|_{x=2}=-1$; **1.2**. $y'-\frac{y}{x}=y^2\sqrt{x^2+4}$, $y\|_{x=1}=1$; **1.3**. $x^4y''+x^3y'=4$;	**1.4.** $y''+3y'-4y=3\sin 2x$, $y\|_{x=0}=2$, $y'\|_{x=0}=0$; **1.5.** $y''-4y'=16\operatorname{ch}4x$; **1.6.** $y''+3y'-4y=xe^{-4x}+5e^{x}$
2	**1.1**. $y'+\frac{y}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{\sqrt{(x+2)(x+4)}}$ $y\|_{x=-1}=\sqrt{3}$; **1.2.** $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$, $y\|_{x=1}=3$, $y'\|_{x=1}=0$; **1.3.** $2x+2xy+(2-x^2)y'=0$;	**1.4.** $y''+9y=\cos 2x$, $y\|_{x=0}=3$, $y'\|_{x=0}=0$; **1.5.** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4x+1}}$; **1.6.** $y''-9y=e^{-3x}\cdot(x-2)-\cos 3x$
3	**1.1.** $y'-\frac{y}{x}=y^2\sqrt{x^2+4}$, $y\|_{x=1}=1$; **1.2**. $(x^2+4xy+5y^2)dx=(6x^2+4xy)dy$; **1.3**. $y''-\frac{6x^2y'}{x^3+1}=(x^3+1)^2$;	**1.4**. $y''+25y=e^{5x}(1-x)$, $y\|_{x=0}=2$, $y'\|_{x=0}=0$; **1.5**. $y''-4y'=2\operatorname{ch}2x$; **1.6**. $y''+25y=4\cos 5x-x$, $y\|_{x=\pi}=5$, $y'\|_{x=\pi}=0$;
4	**1.1**. $y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{2y}$; **1.2**. $y'=\frac{2y-x}{2x+y}$, $y\|_{x=1}=0$; **1.3.** $y''+y'\operatorname{tg}x=\cos^3 x$;	**1.4.** $y''-3y'+2y=e^{2x}(x-3)$, $y\|_{x=0}=0$, $y'\|_{x=0}=-2$; **1.5.** $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}(x^2+3x-1)}{x}$; **1.6.** $y''+25y=y\sin x+4x^2$, $y\|_{x=\pi}=3$, $y'\|_{x=\pi}=-1$;
5	**1.1.** $y^3y'+\frac{y^4}{2x}=\frac{\sin x}{x}$, $y\|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$;	**1.4.** $y''+3y'-4y=5e^{x}\cos x$, $y\|_{x=0}=1$, $y'\|_{x=0}=-2$;

	1.2. $y'=\dfrac{2y+x}{2x-y}$, $y\vert_{x=1}=1$; **1.3.** $y''\sin y=(y')^2$;	**1.5.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+4x}}$; **1.6.** $y''+y=e^{-x}-2\sin x$.
6	**1.1.** $(3e^x\operatorname{tg}^2 y)dx+(1-e^x)dy=0$; **1.2.** $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$, $y\vert_{x=\sqrt{3}}=1$; **1.3.** $y''-\dfrac{y'}{x}=x\arcsin x$ $y\vert_{x=1}=0$, $y'\vert_{x=1}=\dfrac{\pi}{2}$;	**1.4.** $y''-2y'+y=xe^x$, $y\vert_{x=0}=2$, $y'\vert_{x=0}=0$; **1.5.** $y''-y'=\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$; **1.6.** $y''-2y'+2y=4e^x\sin x-3e^{2x}$
7	**1.1.** $y'+\dfrac{4y}{4x+1}=y^3(4x+1)$, $y\vert_{x=1}=2$; **1.2.** $y'=\dfrac{x\sin x}{\cos^3 y}$, $y\vert_{x=\pi}=2\pi$; **1.3.** $y''+\dfrac{2y'}{\sin 2x}=\cos x$;	**1.4.** $y''+y=-\cos 2x$, $y\vert_{x=0}=1$, $y'\vert_{x=0}=0$; **1.5.** $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$; **1.6.** $y''-5y'+6y=e^{3x}(\mathrm{x}^2-4)+7\mathrm{e}^x$
8	**1.1.** $\sqrt{4-x^2}dx-xy\sqrt{1-y^2}dy=0$; **1.2.** $xy'-y=xe^{-\frac{y}{x}}$, $y\vert_{x=1}=0$; **1.3.** $y''-\dfrac{y'}{\sin x}=\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos^3(\frac{x}{2})}$;	**1.4.** $y''+y=x^3+1$, $y\vert_{x=0}=2$, $y'\vert_{x=0}=0$; **1.5.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4x+1}}$; **1.6.** $y''-4y'-5y=(2x+1)e^{5x}-2\cos x$
9	**1.1.** $y'+\dfrac{y}{x}=y^2x\sin x$, $y\vert_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4}{\pi}$; **1.2.** $x^2y'=xy+y\sqrt{y^2-4xy}$, $y\vert_{x=1}=4$; **1.3.** $(y-4)(y-3)y''=(y')^2$;	**1.4.** $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x$, $y\vert_{x=0}=-1$, $y'\vert_{x=0}=2$; **1.5.** $y''+4y=4\operatorname{tg}2x$; **1.6.** $y''+4y=\cos 2x-3\sin 2x-4e^{2x}$
10	**1.1.** $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{y}dx+xdy=0$, $y\vert_{x=1}=1$; **1.2.** $y'=xy^2-9x-2y^2+18$, $y\vert_{x=3}=-4$; **1.3.** $y''+\dfrac{xy'}{x^2+4}=x$, $y\vert_{x=0}=1$, $y'\vert_{x=0}=0$;	**1.4.** $y''-3y'+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10)$; **1.5.** $y''+9y=\dfrac{2}{\cos^2 3x}$; **1.6.** $y''+9y=\sin 3x-\cos 3x+5e^{-3x}$
11	**1.1.** $y'+\dfrac{y}{x}=y^2(1+x^2)$, $y\vert_{x=1}=2$; **1.2.** $3xy^2dy-(2y^3+x^3)dx=0$;	**1.4.** $y''+4y'-5y=xe^x$, $y\vert_{x=0}=0$, $y'\vert_{x=0}=2$;

	1.3. $y''-\frac{2\sin x}{\cos x+1}y'=\sin x$, $y\vert_{x=2\pi}=-1,\ y'\vert_{x=2\pi}=0$;	**1.5.** $y''+4y'+4y=\frac{xe^{-2x}}{x^2+4}$; **1.6.** $y''+y=\sin 3x-4\cos 3x-3e^{-x}$
12	**1.1**. $xy'-y=\sqrt{2xy+y^2}$; **1.2**. $y^5y'-\frac{y^6}{x}=x^5\ln x$, $y\vert_{x=1}=2$; **1.3**. $y''+y'\operatorname{tg}x=\cos^2 x$, $y\vert_{x=\pi}=0,\ y'\vert_{x=\pi}=-1$;	**1.4.** $y''+4y=2\sin 2x-\cos 2x$, $y\vert_{x=0}=3,\ y'\vert_{x=0}=1$; **1.5.** $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$; **1.6.** $y''-4y'-5y=(x+1)e^{2x}+3e^{-x}$
13	**1.1.** $y'=xy^2-y^2-6y+6xy$; **1.2.** $(2x^2y+xy^2+y^3)dx-(2x^3+x^2y)dy=0$, $y\vert_{x=1}=-1$; **1.3.** $y''=\frac{y'}{x}+x\cos^2 x$, $y\vert_{x=\pi}=1,\ y'\vert_{x=\pi}=-2$;	**1.4**. $y''-y'=x^2e^{-x}$, $y\vert_{x=0}=0,\ y'\vert_{x=0}=2$; **1.5.** $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}$; **1.6.** $y''+4y'+5y=e^{-2x}\cos x+xe^x$
14	**1.1**. $y^4y'-\frac{y^5}{5x}=(\ln x-3)^5$, $y\vert_{x=1}=2$; **1.2**. $xy'-y=\sqrt{10x^2+2xy+y^2}$; **1.3.** $y''(1+y^4)+4y^3(y')^2=0$, $y\vert_{x=0}=1,\ y'\vert_{x=0}=2$;	**1.4.** $y''+3y'-4y=(x+2)e^x$, $y\vert_{x=0}=0,\ y'\vert_{x=0}=1$; **1.5**. $y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{1+e^x}$; **1.6**. $y''+6y'+10y=e^{-3x}\cos x+xe^{-3x}$
15	**1.1**. $x^2y'=2xy-3$, $y\vert_{x=-1}=1$; **1.2**. $y'(2y-x)=y+2x$; **1.3.** $y''\operatorname{tg}x=y'+1$, $y\vert_{x=\frac{\pi}{4}}=0,\ y'\vert_{x=\frac{\pi}{4}}=-1$;	**1.4.** $y''-3y'+2y=e^x x^2$, $y\vert_{x=0}=2,\ y'\vert_{x=0}=0$; **1.5.** $y''+8y'+16y=\frac{e^{-4x}}{x^2-9}$; **1.6**. $y''+9y=5\sin x-3\cos x+e^{3x}$;
16	**1.1.** $y'\cos x+y\sin x=1$, $y\vert_{x=\pi}=1$; **1.2**. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$; **1.3.** $2yy''=1+(y')^2$;	**1.4**. $y''+25y=\cos 2x+2\sin 2x$, $y\vert_{x=0}=2,\ y'\vert_{x=0}=-1$; **1.5.** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x-4}$; **1.6.** $y''-4y'=x^2+3x-1$, $y\vert_{x=1}=0,\ y'\vert_{x=1}=0$
17	**1.1**. $(x^2+2y^2)dx=(2x^2+y^2)dy$, $y\vert_{x=-2}=0$;	**1.4.** $y''+4y'-5y=2\cos 2x$,

	1.2. $y^4y'-\frac{y^5}{5x}=(\ln x-3)^5$, $y\|_{x=1}=3$; **1.3.** $x^4y''+x^3y'=4$;	$y\|_{x=0}=-2,\ y'\|_{x=0}=1$; **1.5.** $y''-4y'=5sh4x$; **1.6.** $y''+6y'+9y=-xe^{3x}+\cos 3x$
18	**1.1.** $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln^2 x$, $y\|_{x=1}=4$; **1.2.** $(x^2+y^2)dx-(x+y)xdy=0$; **1.3.** $y''=ctg^2x$, $y\|_{x=\frac{\pi}{2}}=8,\ y'\|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1$;	**1.4.** $2y''-y'-y=3xe^{2x}$, $y\|_{x=0}=1,\ y'\|_{x=0}=-2$; **1.5.** $y''-8y'+16y=\frac{(x+2)e^{4x}}{x^2-1}$; **1.6.** $y''+16y=3\cos 4x+e^{2x}$
19	**1.1.** $y'-\frac{y}{x}=y^2\sqrt{x^2+4}$, $y\|_{x=1}=0$; **1.2.** $y\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)dx+xdy=0$, $y\|_{x=2}=2$; **1.3.** $x^5y''+x^4y'=0$;	**1.4.** $y''+7y'-8y=\sin x$, $y\|_{x=0}=3,\ y'\|_{x=0}=-2$; **1.5.** $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{\sqrt{4x+1}}$; **1.6.** $y''+4y'=x^2-4x+3+2e^x$
20	**1.1.** $y'=xy^2-9x-2y^2+18$, $y\|_{x=3}=5$; **1.2.** $3xy^2dy-(2y^3+x^3)dx=0$, $y\|_{x=1}=3$; **1.3.** $y''+\frac{xy'}{x^2+4}=x$, $y\|_{x=0}=2,\ y'\|_{x=0}=1$;	**1.4.** $y''-3y'+2y=e^x(4x+2)$; **1.5.** $y''+4y=\frac{3}{\cos^2 2x}$; **1.6.** $y''+4y'+4=3\cos 2x+e^{-2x}$

Задание 2. Решите систему линейных дифференциальных уравнений двумя методами: методом исключения и матричным методом.

Задание 3. Постройте интегральные линии дифференциального уравнения первого порядка. Найдите уравнение интегральной линии, проходящей через заданную точку M_0. Проанализируйте теорему существования и единственности частных решений данного ДУ.

№ Вариан	Задание 2	Задание 3
1	$\begin{cases} x'_t=2y-5x \\ y'_t=x-6y \end{cases}$	$yy'=-2x$, $M_0(0;5)$
2	$\begin{cases} x'_t=3x-y \\ y'_t=x+y \end{cases}$	$y'=\frac{2x}{3y}$, $M_0(1;1)$

3	$\begin{cases} x'_t = 2x + y \\ y'_t = 3x + 4y \end{cases}$	$xy' = 2y$, $M_0(1;3)$.
4	$\begin{cases} x'_t = 8y - x \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $M_0(2;2)$.
5	$\begin{cases} x'_t = 3x + y \\ y'_t = -y + 3x \end{cases}$	$y' = \dfrac{2y}{\sin 2x}$, $M_0(\frac{\pi}{4};1)$.
6	$\begin{cases} x'_t = x - 3y \\ y'_t = x + 5y \end{cases}$	$y' \operatorname{tg} x - y = 0$, $M_0(-\frac{\pi}{2};2)$.
7	$\begin{cases} x'_t = 5x + y \\ y'_t = -3x + 9y \end{cases}$	$y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2yx}$, $M_0(1;2)$.
8	$\begin{cases} x'_t = 3x + y \\ y'_t = x + 3y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2}dy = xdx$, $M_0(0;-2)$.
9	$\begin{cases} x'_t = 9x + 6y \\ y'_t = 2x + 8y \end{cases}$	$y'(x^2 - 4) = 2xy$, $M_0(0;5)$.
10	$\begin{cases} x'_t = x - 2y \\ y'_t = x + 4y \end{cases}$	$(xy - x^2)y' = x^2 + 2y^2 - 3xy$, $M_0(1;0)$.
11	$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$	$xy' + y = 0$, $M_0(-2;4)$.
12	$\begin{cases} x'_t = 8x + 2y \\ y'_t = -3x + 15y \end{cases}$	$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $M_0(2;0)$.
13	$\begin{cases} x'_t = 7x - 5y \\ y'_t = -4x + 8y \end{cases}$	$xy' = x + 2y$, $M_0(2;0)$.
14	$\begin{cases} x'_t = 8x + 2y \\ y'_t = -3x + 15y \end{cases}$	$y' + y \operatorname{tg} x = 0$, $M_0(\pi;-0.3)$.
15	$\begin{cases} x'_t = 3x + y \\ y'_t = x + 3y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2}dy = xdx$, $M_0(0;-2)$.
16	$\begin{cases} x'_t = x - 2y \\ y'_t = x + 4y \end{cases}$	$y'(x^2 - 4) = 2xy$, $M_0(0;5)$.

17	$\begin{cases} x'_t = 8y - x \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2}dy = xdx$, $M_0(0;4)$.
18	$\begin{cases} x'_t = 7x - 5y \\ y'_t = -4x + 8y \end{cases}$	$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $M_0(-3;1)$.
19	$\begin{cases} x'_t = 3x - y \\ y'_t = x + y \end{cases}$	$y' = \dfrac{2x}{3y}$, $M_0(-1;2)$.
20	$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y \\ y'_t = -2x + 11y \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2}dy = xdx$, $M_0(0;3)$.

Задание 4.

Найдите изображения по Лапласу функций-оригиналов, заданных при значениях $t \ge 0$.

Задание 5. Восстановите функции-оригиналы, если даны их изображения по Лапласу.

вар.	Задание 4	Задание 5
1	1) $f(t) = \sin 2t \cdot \cos 5t$; 2) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \le 3 \\ 3, & t > 3 \end{cases}$; 3) $f(t) = 2(2-t), t \in [0;2]$, периодическая с T=2.	1) $F(p) = \dfrac{4p+2}{p^2+2p+8} \cdot e^{-2p}$; 2) $F(p) = \dfrac{1}{p^3-2p^2-3p}$; 3) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ - с помощью свертки.
2	1) $f(t) = \sin^4 t$; 2) $f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 4 \\ 2, & t > 4 \end{cases}$; 3) $f(t) = 2t, t \in [0;2]$, периодическая с T=2.	1) $F(p) = \dfrac{p}{p^2-5p+12} \cdot e^{-p}$; 2) $F(p) = \dfrac{p-2}{(p^2-1)(p+3)}$; 3) $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p-3)}$ - с помощью свертки.
3	1) $f(t) = sh^2 3t$; 2) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & \pi < t \le 2\pi \\ 1, & t > 2\pi \end{cases}$; 3) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0;1] \\ 0, & t \in (1;2] \end{cases}$, периодическая с T=2.	1) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2-2p+5} \cdot e^{-3p}$; 2) $F(p) = \dfrac{p^2+3}{p^3-2p^2-3p}$; 3) $F(p) = \dfrac{2}{p^2(p^2-9)}$ - с помощью свертки.

4	1) $f(t)=t\cdot\sin^2 2t$; 2) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t<4\\ 2, & t\ge 4\end{cases}$; 3) $f(t)=e^t$, $t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p+7}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1-p}{(p^2-4)(p+1)}$; 3) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$ - с помощью свертки.
5	1) $f(t)=t\sin t\cdot\sin 5t$; 2) $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t\le 3\\ 4, & t>3\end{cases}$; 3) $f(t)=2t$, $t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{5p+2}{p^2-2p+8}\cdot e^{-3p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2-3p}$; 3) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)(p-2)}$ - с помощью свертки.
6	1) $f(t)=\cos^4 t$; 2) $f(t)=\begin{cases}e^t, & 0\le t\le 1\\ 0, & 1<t\le 3\\ 3, & t>3\end{cases}$; 3) $f(t)=2-t$, $t\in[0;2]$, периодическая с T=2.	1) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+5p+15}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p-2}{(p^2-9)(p+2)}$; 3) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-4)}$ - с помощью свертки.
7	1) $f(t)=ch^2 3t$; 2) $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t\le\pi\\ 0, & \pi<t\le 2\pi\\ -1, & t>2\pi\end{cases}$; 3) $f(t)=\begin{cases}1-t, & t\in[0;1]\\ 1, & t\in(1;2]\end{cases}$, периодическая с T=2.	1) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+2p+6}\cdot e^{-2p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2-3}{p^3+2p^2-3p}$; 3) $F(p)=\dfrac{2}{p^2(p^2+9)}$ - с помощью свертки.
8	1) $f(t)=t\cdot sh^2 t$; 2) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t<3\\ 2, & t\ge 3\end{cases}$; 3) $f(t)=e^t$, $t\in[0;2]$, периодическая с T=2.	1) $F(p)=\dfrac{1-p}{p^2+4p+8}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{3-p}{(p^2-1)(p+4)}$; 3) $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+4)(p^2+1)}$ - с помощью свертки.
9	1) $f(t)=t\sin^2 t$; 2) $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t\le 1\\ 0, & 1<t\le 4\\ 2, & t>4\end{cases}$; 3) $f(t)=1+t$, $t\in[0;2]$, периодическая с T=2.	1) $F(p)=\dfrac{p-4}{p^2-5p+15}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p^2-1)(p-4)}$; 3) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4)}$ - с помощью свертки.

10	1) $f(t)=\sin 2t\cdot\sin 5t$; 2) $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t<2 \\ 0, & 2\le t\le 3 \\ 4, & t>3 \end{cases}$; 3) $f(t)=2(1-t),\ t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{4p+2}{p^2+2p+8}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2-3p}$; 3) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$ - с помощью свертки.
11	1) $f(t)=t\cdot ch^2 2t$; 2) $f(t)=\begin{cases} 1-t^2, & 0\le t<1 \\ 0, & 1\le t<3 \\ 2, & t\ge 3 \end{cases}$; 3) $f(t)=e^{1+t},\ t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{2-p}{p^2+4p+13}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{4-p}{(p^2-1)(p-3)}$; 3) $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+4)(p^2+9)}$ - с помощью свертки.
12	1) $f(t)=t\cdot\sin^2 2t$; 2) $f(t)=\begin{cases} 1-t^2, & 0\le t<1 \\ 0, & 1\le t<4 \\ 2, & t\ge 4 \end{cases}$; 3) $f(t)=e^t,\ t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+2p+6}\cdot e^{-2p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2-3}{p^3+2p^2-3p}$; 3) $F(p)=\dfrac{2}{p^2(p^2+9)}$ - с помощью свертки.
13	1) $f(t)=t\sin t\cdot\sin 5t$; 2) $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t<1 \\ 0, & 1\le t\le 3 \\ 4, & t>3 \end{cases}$; 3) $f(t)=2t,\ t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{2-p}{p^2+4p+13}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{4-p}{(p^2-1)(p-3)}$; 3) $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+4)(p^2+9)}$ - с помощью свертки.
14	1) $f(t)=t\cdot sh^2 t$; 2) $f(t)=\begin{cases} 1-t^2, & 0\le t<1 \\ 0, & 1\le t<3 \\ 2, & t\ge 3 \end{cases}$; 3) $f(t)=e^t,\ t\in[0;2]$, периодическая с T=2.	1) $F(p)=\dfrac{4p+2}{p^2+2p+8}\cdot e^{-2p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-2p^2-3p}$; 3) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ - с помощью свертки.
15	1) $f(t)=ch^2 3t$; 2) $f(t)=\begin{cases} \cos t, & 0\le t\le\pi \\ 0, & \pi<t\le 2\pi \\ -1, & t>2\pi \end{cases}$; 3) $f(t)=\begin{cases} 1-t, & t\in[0;1] \\ 1, & t\in(1;2] \end{cases}$, периодическая с T=2.	1) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-5p+12}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p-2}{(p^2-1)(p+3)}$; 3) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p-3)}$ - с помощью свертки.

16	1) $f(t)=\sin 3t\cdot\sin 5t$; 2) $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t<2 \\ 0, & 2\le t\le 3 \\ -1, & t>3 \end{cases}$; 3) $f(t)=2(1-t),\ t\in[0;1]$, периодическая с T=1.	1) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+5p+15}\cdot e^{-p}$; 2) $F(p)=\dfrac{p-2}{(p^2-9)(p+2)}$; 3) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+4)}$ - с помощью свертки.
17		
18		
19		
20		

Задание 6

Решите операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы обыкновенных ДУ; ответы подтвердите проверками.

№ вар.	Задание 6 (диф. уравнение)	Задание 6 (система ДУ)
1	$x''+3x'+2x=3t\sigma(t-1)$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$	$\begin{cases} x'=x-2y+e^t \\ y'=x-y \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=-2$.
2	$x''-4x'+4x=e^t\sigma(t-1)$, $x(0)=0$, $x'(0)=3$	$\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=x-y+t \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=-1$.
3	$x''+x=e^{-t}\sigma(t-2)$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases} x'=-4x+y \\ y'=-2x-y \end{cases}$, $x(0)=2$, $y(0)=3$.
4	$x''+x=-t\cdot\sigma(t-1)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=x-y+e^t \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=-3$.
5	$x''-6x'+9x=-t\cdot\sigma(t-2)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases} x'=-x+3y \\ y'=x+y+e^{-t} \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=2$.
6	$x''+9x=-\sigma(t-3)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$	$\begin{cases} x'=2x+4y+\cos t \\ y'=-x-2y+\sin t \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=0$.
7	$x''-4x'+5x=\cos t\cdot\sigma(t-\pi)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases} x'=x+2y+t \\ y'=x-y \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=-1$.
8	$x''+6x'+9x=3t\sigma(t-0{,}5)$, $x(0)=0$, $x'(0)=-2$.	$\begin{cases} x'=2x+4y-\cos t \\ y'=-x-2y \end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=1$.

9	$x''-8x'-9x=\sin t\cdot\sigma(t-\pi)$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.	$\begin{cases}x'=x-2y\\ y'=2x-y+2t\end{cases}$, $x(0)=2$, $y(0)=0$.
10	$x''-6x'-7x=t\sigma(t-1{,}5)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases}x'=x+2y\\ y'=2x+y-4\end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=2$.
11	$x''+x'=t^2\sigma(t-1),\ x(0)=0,\ x'(0)=-2$	$\begin{cases}x'=2y-3x\\ y'=y-2x-t\end{cases}$, $x(0)=0$ $y(0)=3$
12	$x''-4x'+5x=\cos t\cdot\sigma(t-\dfrac{\pi}{2})$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases}x'=-x+3y\\ y'=x+y+e^{-t}\end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=2$.
13	$x''-6x'+9x=-t\cdot\sigma(t-2)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases}x'=2x+4y-\cos t\\ y'=-x-2y\end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=1$.
14	$x''+9x=-\sigma(t-3)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$	$\begin{cases}x'=x-2y+e^t\\ y'=x-y\end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=-2$.
15	$x''+x=-t\cdot\sigma(t-1)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.	$\begin{cases}x'=2x+4y+\cos t\\ y'=-x-2y+\sin t\end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=0$.
16	$x''+4x=\sigma(t-2)$, $x(0)=0$, $x'(0)=4$.	$\begin{cases}x'=-x+3y\\ y'=x+y+e^{-t}\end{cases}$, $x(0)=0$, $y(0)=-2$.
17		
18		
19		
20		

Приложение Б. Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ

ФГАОУ ВО «Мурманский государственный технический университет»

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Контрольная работа

«Обыкновенные ДУ и системы ДУ»

по дисциплине «Специальные разделы высшей математики»

выполнил:	студент группы ИВТб-21о
	Сумин И.А.
проверил:	доцент Кацуба В.С.
оценка:	______________________
дата:	______________________

Мурманск, 2023